Universität Heidelberg
G. Kanschat, S. Meggendorfer

Abgabe: **02.07.2019**

Übung Nr. 9
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 9.1: Ausgleichsrechnung

Zeit	Ozon
0:00	28.00
3:00	21.00
6:00	41.00
15:00	101.00
23:00	63.00
24:00	70.00

Tabelle 1: Ozon-Werte vom 23.06.2019 [in $^{\mu g}/_{m^3}$] Station Heidelberg.
Quelle: https://udo.lubw.baden-wuerttemberg.de/

In Tabelle 1 sind Messwerte des Ozongehalts [in $^{\mu g}/_{m^3}$] in Heidelberg vom 23.06.2019 gelistet. Wir möchten mittels Best-Approximation ein kubisches Polynom finden, welches die Daten approximiert.

(a) Schreiben Sie das lineare Ausgleichsproblem in der Form $\|Ax - b\| = \min$. Wählen Sie dazu eine beliebige Basis in $\mathbb{P}_3$.

(b) Stellen Sie die Normalengleichungen auf.

(c) Lösen Sie das Gleichungssystem mithilfe der QR-Zerlegung.

Aufgabe 9.2: Konditionierung

Sei $\|\cdot\|$ eine Operatornorm zur Vektornorm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass für invertierbare Matrizen $A \in GL(n)$ gilt

$$\operatorname{cond}(A) = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|}.$$

Aufgabe 9.3: Banachscher Fixpunktsatz im $\mathbb{R}^n$

Sei M eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f\colon M \to M$ eine Kontraktion, d.h. es existiert eine Zahl $0 \leq \rho < 1$, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \rho\|x - y\| \qquad \forall x, y \in M,$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist. Sei weiter $x^{(0)} \in M$ und die Folge $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ definiert durch $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt: $$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| \leq \rho^n \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

(b) Die Folge $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ konvergiert für beliebige Startwerte $x^{(0)} \in M$ gegen einen Grenzwert $x^* \in M$.
(Tipp: Erinnern Sie sich an die geometrische Reihe und zeigen Sie, dass $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ eine Cauchy-Folge ist).

(c) Der Grenzwert x^* der Folge $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ ist Fixpunkt von f, d.h. $f(x^*) = x^*$.

(d) x^* ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe 9.4: Fehlerabschätzungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Zeigen Sie unter den Voraussetzungen und mit der Notation aus Aufgabe 9.3 die folgenden Fehlerabschätzungen der Fixpunktiteration $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$:

(a) Lineare Konvergenzgeschwindigkeit: $\|x^* - x^{(n+1)}\| \leq \rho\|x^* - x^{(n)}\|$

(b) A-priori Fehlerabschätzung: $\|x^* - x^{(n)}\| \leq \rho^n\|x^* - x^{(0)}\|$

(c) A-posteriori Fehlerabschätzung 1: $\|x^* - x^{(n+1)}\| \leq \frac{\rho}{1-\rho}\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|$

(d) A-posteriori Fehlerabschätzung 2: $\|x^* - x^{(n)}\| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$