Universität Heidelberg
G. Kanschat, S. Meggendorfer

Abgabe: **25.06.2019**

Übung Nr. 8
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 8.1: Bandmatrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Bandmatrix der Bandbreite $m < n$, das heißt, $a_{ij} = 0$ für $|i-j| > m$. Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Wenn die LR-Zerlegung von A ohne Zeilenvertauschungen durchgeführt wird, sind L und R ebenfalls Bandmatrizen der Bandbreite m.

(b) Der Aufwand zur Berechnung der LR-Zerlegung ist $\mathcal{O}(nm^2)$. Hinweis: Es ist nicht nötig, den Faktor $1/3$ vor nm^2 zu erzielen.

(c) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.2: QR-Zerlegung mit Householder-Reflexion

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

mit dem Householder-Verfahren.

Aufgabe 8.3: Eigenschaften von Orthogonalprojektionen und Spiegelungen

Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$. Zeigen Sie für $P := I - vv^*$ und $S := I - 2vv^*$:

(a) $v \in \mathrm{Kern}(P)$

(b) $\forall w \in \mathbb{R}^n : \quad Pw = PPw$

(c) $\mathrm{Rang}(P) = n - 1$

(d) $\forall w \in \mathrm{Bild}(P) : \quad \langle w, v\rangle_2 = 0$

(e) $\forall w \in \mathbb{R}^n \quad \langle Pw, (I-P)w\rangle_2 = 0$

(f) $\mathrm{Rang}(S) = n$

(g) $\forall w \in \mathbb{R}^n\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \quad S^k w = Pw + (-1)^k (I-P)w$

(h) Zeichnen Sie in ein kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ folgendes ein: $v := {}^1\!/_5 \cdot (0, 3, 4)$, $\mathrm{Bild}(P)$, Pv, Sv.