Universität Heidelberg
G. Kanschat, S. Meggendorfer

Abgabe: **11.06.2019**

Übung Nr. 7
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 7.1: Kondition einer s. p. d. Matrix Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Seien $v^{(i)}$ die Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_i für $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie

(a) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn λ^{-1} Eigenwert von A^{-1} ist. Insbesondere gilt für $x = \sum \alpha_i v^{(i)}$:

$$A^{-1}x = \sum \frac{\alpha_i}{\lambda_i} v^{(i)}.$$

(b) Es ist $\operatorname{cond}_2(A) = {}^{\lambda_{\max}}/_{\lambda_{\min}}$, wobei $\lambda_{\max}$ und $\lambda_{\min}$ den größten und kleinsten Eigenwert von A bezeichnen.

Aufgabe 7.2: Dreiecksmatrizen Beweisen Sie:

(a) Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist eine obere Dreiecksmatrix. Dasselbe gilt für untere Dreiecksmatrizen.

(b) Für eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R ist R^{-1} wieder obere Dreiecksmatrix.

(c) Für eine untere Dreiecksmatrix L mit Einsen auf der Diagonalen ist L^{-1} wieder von dieser Gestalt.

(d) Es gilt

$$\det R = \prod_{i=1}^{n} r_{ii}, \qquad \det L = 1. \tag{7.1}$$

Aufgabe 7.3: Frobenius-Matrizen Frobenius-Matrizen haben die Gestalt

$$G_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & g_{i+1,i} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & g_{ni} & & 1 \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie:

(a) Das Resultat der Multiplikation $G_i A$ ist eine Matrix, in der zur k-ten Zeile von A das g_{ik}-fache der i-ten Zeile addiert wurde.

(b) Die Inverse der Frobenius Matrix G_i ist

$$G_i^{-1} = 2I - G_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -g_{i+1,i} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -g_{ni} & & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Für $i < j$ gilt

$$G_i G_j = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & g_{i+1,i} & \ddots & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & & \\ & \vdots & & g_{j+1,j} & \ddots & & \\ & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & g_{ni} & & g_{nj} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.4: Gauß-Elimination, LR-Zerlegung

(a) Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des folgenden LGS mit Hilfe der Gauß-Elimination

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A aus dem vorigen Aufgabenteil ohne Pivotierung.

(c) Zeigen Sie $\det A = \det R$ und berechnen Sie die Determinante von A.