Universität Heidelberg
G. Kanschat, S. Meggendorfer

Abgabe: **04.06.2019**

Übung Nr. 6
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 6.1: Gauß-Quadratur

(a) Bestimmen Sie die Quadraturpunkte und -gewichte der Gauß-Formel mit 3 Punkten für das Intervall $[0,1]$ ohne eine Formelsammlung zu benutzen.

(b) Approximieren Sie mit Hilfe der Quadraturformel aus Teil (a) die Integrale

$$\int_0^1 \left(3x^4 + 18x - 4\right) dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \sin(x) dx$$

und geben Sie jeweils den Fehler mit einer Genauigkeit von 4 Dezimalstellen an.

Aufgabe 6.2: Romberg-Quadratur

Benutzen Sie Romberg-Quadratur für die summierte Trapezregel mit Schrittweiten $h = (b-a)/n$ und $h/2$ zur Approximation des Integrals $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Zeigen Sie, dass das Ergebnis gleich dem der Simpsonregel mit Schrittweite h ist.

Aufgabe 6.3: Operatornorm

(a) Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass durch

$$\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

eine mit der Vektornorm $\|\cdot\|$ verträgliche Matrizennorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ erklärt ist.

Bemerkung: Diese Norm heißt "natürliche Matrizennorm" oder auch "Operatornorm".

(b) Zeigen Sie, dass aus der Verträglichkeit in (a) die Submultiplikativität der Operatornorm folgt:

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\| \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(c) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir betrachten die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Zeigen Sie, dass für die natürliche Matrizennorm gilt

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2.$$

Aufgabe 6.4: Frobeniusnorm

(a) Beweisen Sie, dass die Frobeniusnorm $\|A\|_F = \left(\sum_{ij} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}$ mit der euklidischen Norm in $\mathbb{R}^n$ verträglich ist.

(b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels in $\mathbb{R}^{2x2}$, dass die Frobeniusnorm nicht die natürliche Matrizennorm zur euklidischen Vektornorm ist.