Universität Heidelberg
G. Kanschat, S. Meggendorfer

Abgabe: **28.05.2019**

Übung Nr. 5
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 5.1: Gewichte der $3/8$-Regel

Auf dem Intervall $I = [0, 1]$ soll eine Quadraturformel durch Interpolation in den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ und $x_3 = 1$ definiert werden. Berechnen Sie die Quadraturgewichte w_i.

Aufgabe 5.2: Trapezregel

(a) Beweisen Sie, dass für die Trapezregel die Fehlerdarstellung

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q_{[a,b]}(f) = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,dx$$

gilt.

(b) Folgern Sie aus (a) die Abschätzung

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{[a,b]}(f)\right| \le \frac{(b-a)^2}{8}\int_a^b |f''(x)|\,dx.$$

(c) Zur Verbesserung der Genauigkeit werde das Intervall $[a, b]$ in n gleichgroße Teilintervalle mit der Breite $(b - a)/n$ unterteilt. Wenden Sie die Trapezregel auf jedem der Teilintervalle an und benutzen Sie die Fehlerabschätzung aus (b) zur Herleitung einer Abschätzung für den Gesamtfehler dieser "summierten Trapezregel". Leiten Sie eine zweite Fehlerabschätzung mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Abschätzung (für jedes Teilintervall) her. Welche Fehlerabschätzung ist vorzuziehen?

Aufgabe 5.3: Experimentelle Konvergenzraten

Gegeben seien die Zahlenfolgen

h	a_h	b_h	c_h
1/2	1.07627	1.70051	0.429204
1/4	0.604185	1.71382	0.00455975
1/8	0.320317	1.71716	1.68691e-05
1/16	0.164945	1.71800	1.62880e-08
1/32	0.0836993	1.71821	3.96572e-12
1/64	0.0421601	1.71826	2.22045e-16
1/128	0.0211582	1.71828	

Die **Konvergenzordnung** einer Folge x_h sei die größte Zahl ϱ so dass $x_h = \mathcal{O}(h^\varrho)$ gilt. Sie kann berechnet werden als

$$\varrho = \frac{1}{\log 2}\lim_{h\to 0}\log\left|\frac{x_h}{x_{\frac{h}{2}}}\right|.$$

(a) Bestimmen Sie eine Approximation der Konvergenzordnung ϱ für a_h. Welche Zeilen der Tabelle benutzen sie dazu am besten? Wie verifizieren Sie Ihr Ergebnis?

(b) Sei $b = \lim_{h\to 0} b_h$. Bestimmen Sie ohne b zu kennen die "intrinsische" Konvergenzordnung der Folge $b - b_h$. Nutzen Sie dazu die Darstellung $b - b_h = b - b_{h/2} + b_{h/2} - b_h$, um die Formel

$$\varrho \approx \frac{1}{\log 2}\log\left|\frac{b_h - b_{\frac{h}{2}}}{b_{\frac{h}{2}} - b_{\frac{h}{4}}}\right|$$

zu rechtfertigen.

(c) Kommentieren Sie die Frage der Konvergenzordnung der Folge c_h