Universität Heidelberg
G. Kanschat, S. Meggendorfer

Abgabe: **21.05.2019**

Übung Nr. 4
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 4.1: Kubische Splines

Es bezeichne S den Raum der natürlichen kubischen Spline-Funktionen zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

(a) Welche der folgenden Funktionen liegen in S?

(i) $f(x) = x^3 - x^2$, (ii) $f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3$, (iii) $f(x) = \max\{0, x-1\}^3 - \frac{1}{2}x^3$

(b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s \in S$ für $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch $s'(x_0) = f'(x_0)$ und $s'(x_2) = f'(x_2)$ ersetzt werden?

Aufgabe 4.2: Eindeutigkeit kubischer Splines

Im Skript wurde bewiesen, dass die kubische stückweise Spline-Interpolierende $s \in S_h^{(3,2)}$ mit natürlicher Randbedingung existiert und eindeutig bestimmt ist.

Beweisen Sie die Eindeutigkeit auch für den Fall der vollständig approximierenden Randbedingung. Modifizieren Sie dazu den Raum N_h geeignet.

Aufgabe 4.3: Differenzenquotienten

Sei $f \in C^3[a,b]$. Für $h > 0$ und $x \in [a,b]$ so, dass $(x \pm h) \in [a,b]$, definieren wir die beiden Differenzenquotienten

$$d_1(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad d_2(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Zeigen Sie:

$$|d_1(x) - f'(x)| \le ch, \qquad |d_2(x) - f'(x)| \le ch^2$$

für ein generisches $c > 0$.

Tipp: Taylor-Polynome