

## Übung Nr. 2 zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

### Aufgabe 2.1: Kubische Hermite Interpolation

Die kubische Hermite-Interpolation auf dem Intervall  $[a, b]$  (im Skript: Beispiel 3.1.29) ist definiert durch die Knotenwerte

$$p(a), p'(a), p(b), p'(b).$$

Berechnen Sie die zugehörigen Basisfunktionen der kubischen Hermite-Interpolation.

### Aufgabe 2.2: Nullstellen orthogonaler Polynome

Sei  $Q$  ein Orthonormalsystem aus Polynomen, das aus Orthogonalisierung der Monome  $\{1, x, x^2, \dots\}$  bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

hervorgegangen ist.

Beweisen Sie, dass die Polynome  $p_n \in Q$  vom Polynomgrad  $n$  nur einfache, reelle Nullstellen im Intervall  $[0, 1]$  besitzen.

### Aufgabe 2.3: Interpolation vs. Extrapolation

(a) Finden Sie die Lagrange-Interpolierende  $p(x; f; x_0, x_1, x_2, x_3)$  der Sinus-Funktion  $f(x) = \sin(x)$  zu den Stützstellen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{4}\pi,$$

indem Sie die zugehörige Lagrange-Interpolationsaufgabe lösen.

**Hinweis:** Das auftretende Gleichungssystem müssen Sie nicht per Hand ausrechnen. Sie dürfen hier gerne ein Computerprogramm Ihrer Wahl benutzen.

(b) Werten Sie die Interpolierende  $p$  einmal an der Stelle  $x = \frac{\pi}{8}$  (Interpolation) und einmal an der Stelle  $x = \frac{7}{8}\pi$  (Extrapolation) aus.

Geben Sie zusätzlich den Fehler zwischen den Approximationen und der exakten Lösung  $x^* = 0.382683432\dots$  bis auf 3 Stellen Genauigkeit an. Was beobachten Sie und wie interpretieren Sie das Ergebnis?