Universität Heidelberg
G. Kanschat, S. Meggendorfer

Abgabe: **07.05.2019**

Übung Nr. 2
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 2.1: Least-Squares-Approximation durch Polynome

(a) Berechnen Sie die Legendre-Polynome bis zum Grad 3.

(b) Berechnen Sie die Bestapproximation von $\cos(\pi/2x)$ durch kubische Polynome bezüglich der L^2-Norm auf $[-1, 1]$ aus der Vorlesung.

(c) Gegeben, dass Sie die Rekursionsformel für Legendre-Polynome nachschlagen können, was würden Sie tun, um auf dem Intervall $[0, 1]$ zu approximieren? Sie brauchen nicht jedes Detail auszuführen.

Aufgabe 2.2: Tschebyscheff-Polynome In der Vorlesung wurde die Dreitermrekursion für die Tschebyscheff-Polynome eingeführt. Eine alternative Darstellung für $x \in [-1, 1]$ ist:

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x).$$

(a) Zeigen Sie, dass die obige Darstellung in der Tat die Dreitermrekursionsformel mit den gegebenen Startwerten erfüllt. Wieso können Sie daraus schließen, dass diese Darstellung tatsächlich Polynome beschreibt?

(b) Zeigen Sie, dass die Orthogonalitätsrelation mit dem Skalarprodukt aus der Vorlesung in der Tat gilt (geschickte Substitution).

(c) Zeigen Sie: der höchste Koeffizient von T_k ist 2^{k-1} und

$$T_k(1) = 1, \qquad T_k(-1) = (-1)^k.$$

(d) Zeigen Sie: es gilt $|T_k(x)| \leq 1$ für $x \in [-1, 1]$ und es gilt dass $|T_k(x)| = 1$ genau dann, wenn für ein $i \in [0, \ldots, k]$ gilt

$$x = \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right).$$

Der Wert $|T_k(x)| = 1$ wird also auf dem Intervall $[-1, 1]$ insgesamt $(k + 1)$-mal angenommen.

(e) Die Nullstellen von T_k sind

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2k}\pi\right) \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Hinweis: für die Aufgabenteile nach a) wählen Sie jeweils die Darstellung oben oder die Dreitermrekursion, je nachdem, was einfacher zum Ziel führt.

Aufgabe 2.3: Interpolation Die Werte des Sinus sind für 0, 30, 45, 60 und 90 Grad aus der Literatur bekannt. Wir benutzen das, um weitere Werte anzunängern

(a) Berechnen Sie die Lagrange-Polynome für die Punkte 0, 30 und 60.

(b) Berechnen Sie $\sin 45°$ durch Interpolation in 0, 30 und $60°$ mit der oben berechneten Lagrange-Basis

(c) Berechnen Sie denselben Wert mit dem Neville-Algorithmus und vergleichen Sie.

(d) Fügen Sie beim Neville-Algorithmus den Punkt $90°$ hinzu und vergleichen Sie die Fehler durch Iterpolation.