

Übung Nr. 12 zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 12.1: Wiederholungsfragen

1. Was ist die Konditionierung einer Rechenaufgabe?
2. Beschreiben Sie in wenigen Worten die Stabilität numerischer Algorithmen.
3. Nennen Sie einen instabilen Algorithmus.
4. Warum produziert der Gram-Schmidt-Algorithmus auf Rechnern keine Orthogonalfolge?
5. Was versteht man unter Auslöschung?
6. Wie vermeidet man Auslöschung bei der Householder-Reflexion?
7. Man skizziere in eigenen Worten die möglichen Stabilitätsprobleme bei der Nullstellensuche von Funktionen.
8. Was ist ein Skalarprodukt?
9. Was ist eine Norm?
10. Wann sind zwei Vektoren orthogonal?
11. Können Sie zu n linear unabhängigen Vektoren ein Orthonormalsystem mit demselben Erzeugnis finden? Begründen Sie.
12. Wofür benötigt man das Gram-Schmidt-Verfahren?
13. Beschreiben Sie die Bestapproximationsaufgabe bezüglich einer Norm.
14. Geben Sie eine Bedingung für Bestapproximation bezüglich einer durch ein Skalarprodukt erzeugten Norm an.
15. Warum wird die Bestapproximationsaufgabe einfacher, wenn man eine Orthonormalbasis hat?
16. Was ist die Gramsche Matrix?
17. Wie sieht die Gramsche Matrix bezüglich einer Orthonormalbasis aus?
18. Was ist der Unterschied zwischen Legendre- und Tschebyscheff-Polynomen?
19. Wie verhalten sich die Tschebyscheff-Polynome im Intervall $[-1, 1]$?
20. Wie verhalten sich die Tschebyscheff-Polynome außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$?
21. Was sind die Tschebyscheff-Abszissen?
22. Was ist Drei-Term-Rekursion?
23. Was ist der Unterschied zwischen Interpolation und Approximation?
24. Beschreiben Sie in wenigen Worten die Aufgabe der Lagrange-Interpolation.
25. Machen Sie eine positive und eine negative Aussage zur Stabilität der Lagrange-Interpolation.
26. Geben Sie Unterschiede zwischen den Basispolynomen von Lagrange und Newton an.
27. Warum benutzt man das Neville-Schema?
28. Geben Sie eine Fehlerdarstellung und eine Fehlerabschätzung für die Lagrange-Interpolation an.
29. Argumentieren Sie anhand der Fehlerdarstellung, warum die Lagrange-Interpolierende für $n \rightarrow \infty$ nicht notwendig approximiert.
30. Welche Funktionen lassen sich gut interpolieren, welche schlecht?
31. Beschreiben Sie in wenigen Worten die Aufgabe der Hermite-Interpolation.

32. Was ist der Unterschied zwischen Spline- und Hermite-Interpolation?
33. Was ist stückweise Interpolation und welchen Vorteil hat sie?
34. Warum vermeiden Spline-Interpolationen starke Oszillationen am Rand oder zwischen den Stützstellen?
35. Welche Optimalitätseigenschaft hat die kubische Spline-Interpolierende?
36. Was ist der Grad der Exaktheit einer Quadraturformel?
37. Was ist der maximale Grad der Exaktheit einer interpolatorischen Quadraturformel mit n Stützstellen?
38. Wie hängt die Ordnung einer summierten Quadraturformel mit dem Grad der Exaktheit zusammen?
39. Worin unterscheiden sich lokale Fehlerordnung und die Ordnung einer summierten Quadraturformel?
40. Warum ist die Simpsonregel eine Ordnung besser als erwartet?
41. Warum benutzt man summierte Quadraturformeln statt einer Formel hoher Ordnung?
42. Was ist das Ziel der Gauß-Quadratur? Wie erreicht man dieses Ziel?
43. Auf welchem Prinzip basiert die Romberg-Quadratur?
44. Was unterscheidet die Gauß-Legendre-Quadratur von der Gauß-Tschebyscheff-Quadratur?
45. Warum wählt man bei der Gauß-Quadratur die Nullstellen des n -ten orthogonalen Polynoms?
46. Was sind die Eigenschaften einer symmetrisch positiv definiten Matrix und die Konsequenz auf die Eigenwerte?
47. Nennen Sie zwei Operatornormen für Matrizen.
48. Was ist die Frobeniusnorm einer Matrix? Ist sie eine natürliche Norm?
49. Wann heißt eine Matrizennorm natürlich und wann verträglich mit einer Vektornorm?
50. Beschreiben Sie die LR-Zerlegung?
51. Wie groß ist der Aufwand zum Erstellen der LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wie groß ist der anschließende Aufwand zum Lösen eines LGS?
52. Wofür benötigt man die Pivotierung?
53. Wie groß ist der Aufwand zum Erstellen der LR-Zerlegung einer Bandmatrix?
54. Beschreiben Sie die QR-Zerlegung?
55. Erläutern Sie den Unterschied von Gram-Schmidt, Householder und Givens-Rotation zur Erstellung der orthogonalen Matrix Q .
56. Wie verhalten sich LR- und QR-Zerlegung von Aufwand und Stabilität her zueinander?
57. Können auch rechteckige Matrizen mit der QR-Zerlegung behandelt werden?
58. Wie sehen die Normalgleichungen der Gaußschen Ausgleichsrechnung aus?
59. Was unterscheidet bei Iterationsverfahren lineare von quadratischer Konvergenz?
60. Was ist eine Kontraktion?
61. Welche Voraussetzungen benötigt der Banachsche Fixpunktsatz?
62. Welche Aussagen macht der Banachsche Fixpunktsatz über Iterationsverfahren?
63. Welche Aussagen macht der Banachsche Fixpunktsatz über einen Fixpunkt?
64. Erläutern Sie in wenigen Worten den Zusammenhang zwischen Minimierung und Nullstellensuche.
65. Beschreiben Sie in wenigen Worten das Verfahren des steilsten Abstiegs.
66. Was ist ein Abstiegsverfahren?
67. Welche Konvergenzaussage hat man für Abstiegsverfahren?

68. Beschreiben Sie das Newton-Verfahren in einer Raumdimension geometrisch.
69. Geben Sie ein Abbruchkriterium für das Newton-Verfahren an.
70. Welche Konvergenzordnung hat das Newton-Verfahren?
71. Fassen Sie in wenigen Worten die Aussage des Konvergenzsatzes für das Newton-Verfahren zusammen.
72. Welche Methode eignet sich zur Globalisierung des Einzugsbereichs des Newton-Verfahrens?
73. Welche Konvergenzaussage gilt für das Newton-Verfahren mit Schrittweitensteuerung?
74. Warum benutzt man iterative Verfahren zur Lösung von $Ax = b$?
75. Auf welchem Prinzip basieren Abstiegsverfahren?
76. Geben Sie zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$ das zugehörige quadratische Minimierungsproblem an.
77. Warum lässt sich die optimale Schrittweite beim Verfahren des steilsten Abstiegs zur Lösung linearer Gleichungssysteme exakt berechnen?
78. Wie hängt die Konvergenzrate des Verfahrens des steilsten Abstiegs mit der Konditionszahl der Matrix zusammen?
79. Warum muss man zum Nachweis der Fixpunkteigenschaft lediglich die Kontraktionseigenschaft nachweisen und nicht die Selbstabbildungseigenschaft?
80. Welcher Parameter ist bei allgemeinen Abstiegsverfahren variabel und trägt bei geschickter Wahl zur Reduktion der Iterationsschritte bei?
81. Erläutern Sie den Unterschied in der Konstruktion von Gradientenverfahren im Vergleich zu dem cg-Verfahren und erläutern Sie den Vorteil des cg-Verfahrens.
82. Warum kann das cg-Verfahren auf dem gesamten Krylov-Raum minimieren, obwohl man nur in einer Richtung explizit minimiert?
83. Warum minimieren wir zur Analyse des cg-Verfahrens über Polynome?
84. Wie hängt die Konvergenz des cg-Verfahrens mit Tschebyscheff-Polynomen zusammen?