Universität Heidelberg
G. Kanschat, S. Meggendorfer

Abgabe: **16.07.2019**

Übung Nr. 11
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 11.1: Minimierung und lineare Gleichungssysteme

Für eine symmetrische und positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sowie einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$F(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}^n$ durch $\langle x, y\rangle_A = x^T Ay$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von F.

(c) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$, dass $Ax = b$ genau dann gilt, wenn $F(x) = \min_{z\in\mathbb{R}^n} F(z)$.

Aufgabe 11.2: Richardson-Verfahren

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die lineare Iteration

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) := x^{(k)} - \omega\left(Ax^{(k)} - b\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass ein Fixpunkt x von g das Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

(b) Finden Sie eine Bedingung an ω, so dass Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz die Existenz und Eindeutigkeit von x und die Konvergenz des Verfahrens für beliebige Startwerte $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ folgern können. Messen Sie dazu die Lipschitz-Stetigkeit in der euklidischen Norm und nutzen Sie die Eigenwertdarstellung symmetrischer Matrizen.

(c) Zeigen Sie, dass es kein ω gibt, für das das Verfahren konvergiert, falls A symmetrisch und indefinit ist, also positive und negative Eigenwerte hat.

Aufgabe 11.3: Nichtlineare Gleichungen

Gegeben sei das nichtlineare Problem (Schnittpunkte eines Kreises und einer Hyperbel)

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 \quad \text{und} \quad x_1^2 - x_2^2 = 1$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen analytisch.

(b) Schreiben Sie die Aufgabe als Nullstellenproblem für geeignetes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Iterierten des Newton-Verfahrens ausgehend von $x^{(0)} = (1, 1)$ mit einer Genauigkeit von $2\cdot 10^{-3}$. Nutzen Sie die a posteriori Fehlerabschätzung aus Aufgabe 9.4c zum Abbruch der Iteration.

(c) Ab welchem Schritt beobachten Sie quadratische Konvergenz?