Universität Heidelberg
G. Kanschat, S. Meggendorfer

Abgabe: **09.07.2019**

Übung Nr. 10
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 10.1: Approximation der Inversen mit der Fixpunktiteration

Zur Berechnung der Inversen A^{-1} einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird folgende Fixpunktiteration betrachtet

$$X^{(k+1)} = X^{(k)}(I - AC) + C, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{für ein reguläres } C \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Verfahren für $\|I - AC\| \leq q < 1$ gegen A^{-1} konvergiert.
(*Hinweis:* Sie dürfen benutzen, dass der Banachsche Fixpunktsatz auch auf abgeschlossenen Mengen $M \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt.)

(b) Beweisen Sie, dass das Verfahren folgende Abschätzung erfüllt

$$\|X^{(k)} - A^{-1}\| \leq q^k \|X^{(0)} - A^{-1}\|, \qquad k \geq 0.$$

Aufgabe 10.2: Neumannsche Reihe

Es sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|T\| < 1$ und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Für die Neumannsche Reihe wollen wir zeigen, dass

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die Folge $(S^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $S^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} T^k$ eine Cauchy-Folge ist.

(b) Multiplizieren Sie die n-te Partialsumme mit $I - T$ und folgern Sie, dass

$$S^{(n)} \to (I - T)^{-1} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe 10.3: Verfahren von Schulz zur Matrizeninvertierung

Zur Berechnung der Inversen A^{-1} einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird folgende Fixpunktiteration betrachtet

$$X^{(k+1)} = X^{(k)}(2I - AX^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \dots.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Methode unter der Bedingung $\|I - AX^{(0)}\| \leq q < 1$ gegen A^{-1} konvergiert.

(b) Zeigen Sie weiter, dass das Verfahren folgende Abschätzung erfüllt

$$\|X^{(k)} - A^{-1}\| \leq \frac{\|X^{(0)}\|}{1-q}\|I - AX^{(k)}\| \leq q^{(2^j)}\frac{\|X^{(0)}\|}{1-q}, \qquad k \geq 0.$$

(*Hinweis:* Neumannsche Reihe)