Universität Heidelberg
G. Kanschat, S. Meggendorfer

Abgabe: **30.04.2019**

Übung Nr. 1
zur Vorlesung Einführung in die Numerik, Sommer 2019

Aufgabe 1.1: gewichtetes Skalarprodukt

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $C^0([a,b])$ aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$, mit $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $p,q \in C^0([-1,1])$

$$\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} \omega(x)p(x)q(x)dx$$

mit einer positiven Gewichtsfunktion $\omega \in C^0([-1,1])$ ein Skalarprodukt ist auf dem reellen Vektorraum $C^0([-1,1])$.

Aufgabe 1.2: Normen

(a) Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Beweisen Sie, dass die induzierte Norm

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$$

tatsächlich eine Norm ist.

(b) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$ die sogenannte “umgekehrte Dreiecksungleichung”

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$$

und folgern Sie, dass $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ist. (Hinweis: $|\cdot|$ stellt den Betrag in $\mathbb{R}$ dar.)

(c) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}^n$ die Maximumsnorm $\|x\|_{\max} = \max_{1\leq i \leq n} |x_i|$ äquivalent ist zur euklidischen Norm $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, d.h. es existieren Konstanten $c, C > 0$, so dass

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_{\max} \leq C\|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Veranschaulichen Sie das Verhalten der beiden Normen durch Zeichnen der Mengen $\big\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\big\}$, für $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\max}$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, und leiten Sie geometrisch die optimalen Konstanten ab.

Aufgabe 1.3: induzierte Normen

Auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V sei $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ eine durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm. Zeigen Sie (natürlich ohne die entsprechenden Lemmas aus der Vorlesung zu benutzen):

(a) Für alle $u, v \in V$ gilt die Parallelogrammidentität

$$\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

(b) Für alle $u, v \in V$ mit $u \perp v$ gilt der Satz von Pythagoras

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

(Hinweis: $\perp$ bedeutet orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

(c) Sei $S \subset V$ eine Orthonormalbasis von V. Dann gilt für alle $u \in V$ die Parsevalsche Gleichung

$$\|u\|^2 = \sum_{s \in S} \big| \langle u, s \rangle \big|^2.$$

Aufgabe 1.4: Bestapproximation

Beweisen Sie den Bestapproximations-Satz aus der Vorlesung geometrisch, indem Sie zeigen, dass

$$\|e\| \leq \|e+v\| \quad \forall v \in W \qquad \Leftrightarrow \qquad e \perp v \quad \forall v \in W.$$

Dabei sei V reeller Vektorraum und W Unterraum. Zum Beweis von "$\Rightarrow$" benutzen Sie ein Widerspruchsargument und gehen wie folgt vor:

(i) Nehmen Sie an, dass $e \in V$ Minimum ist.

(ii) Schreiben Sie e als $e = e_\perp + w$, wobei $\langle e_\perp, v\rangle = 0 \; \forall v \in W$ und $0 \neq w \in W$.

(iii) Folgern Sie, dass $\|e_\perp\| \leq \|e\|$.

(iv) Warum ist das ein Widerspruch?