Quiz zur Wiederholung der Inhalte der Linearen Algebra und Analysis

April 2019

Auf diesem Zettel sollen Sie die Grundbegriffe aus der Linearen Algebra und Analysis wiederholen können. Ziel ist, dass Ihnen damit der Einstieg in die Vorlesung deutlich einfacher fällt. Definitionen zu kennen und Gegebenes kritisch zu prüfen ist ein wichtiger Grundpfeiler, um mathematisches Denken zu lernen. Sie sollen Ihr Wissen aber nicht nur abrufen, sondern auch anwenden. Lesen Sie genau und versuchen Sie sich an den folgenden Aufgaben.

Beachten Sie, dass es durchaus möglich ist, dass alle, mehrere oder keine Antwortmöglichkeiten richtig sind. Sollten Sie nicht weiterkommen, schauen Sie doch, ob die bisher beantworteten Fragen oder Aufgaben einen Ansatz liefern. Viel Erfolg!

1. Welche Aussagen treffen zu?
   - ■ $\{i,1\} \subset \mathbb{C}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum.
   - ☐ $\{i,1\} \subset \mathbb{C}$ ist linear unabhängig über $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum.
   - ☐ $\{i,1\} \subset \mathbb{C}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum.
   - ■ $\{i,1\} \subset \mathbb{C}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2. Es sei
$$\mathcal{P}_N = \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \,\middle|\, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$
   der Raum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich N. Welche Aussagen treffen zu?
   - ■ $\mathcal{P}_N$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
   - ☐ $p \in \mathcal{P}_N$ hat höchstens N reelle Nullstellen.
   - ☐ $\mathcal{P}_N$ ist ein $\mathcal{P}_N$-Vektorraum.
   - ■ $\mathcal{P}_N$ hat endliche Dimension.

3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\{v_1,\dots,v_N\} \subset V$ ein System von Vektoren aus V. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent dazu, dass $v_1,\dots,v_N$ eine Basis von V bilden?
   - ■ $v_1,\dots,v_N$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
   - ☐ $v_1,\dots,v_N$ ist ein maximales Erzeugendensystem von V.
   - ■ Jedes $v \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n v_n$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$.
   - ■ $v_1,\dots,v_N$ ist eine maximale linear unabhängige Menge in V.
   - ☐ $v_1,\dots,v_N$ ist eine minimale linear unabhängige Menge in V.

   Hinweis: Die Begriffe „minimal“ und „maximal“ beziehen sich auf die Kardinalität der Menge.

4. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 23 & 2 & -12 & 8 & 25 \\ 98 & 398 & -19 & 10 & 27 \\ 287 & -1 & 0 & \pi^2/6 & 72 \\ 98 & 398 & -19 & 10 & 27 \\ 27 & 48 & 59 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det A$.

☐ 27825 ■ 0 ☐ 1 ☐ $\pi^2/6$

5. Welche Eigenschaft erfüllt eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V *nicht*?

   ☐ $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ für alle $v \in V$

   ■ $\|\lambda v\| = \lambda \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

   ☐ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

   ☐ $\|v - w\| \geq |\,\|v\| - \|w\|\,|$

6. Welche Dimension hat

$$\mathcal{P}_N = \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \,\middle|\, a_n \in \mathbb{R} \right\},$$

   der Vektorraum der reellwertigen Polynome bis Grad N?

   ☐ $N-1$ ☐ N ■ $N+1$ ☐ ∞

7. Sei A eine $m \times n$ Matrix, was gilt für den Rang von A? ☐ $\operatorname{rang} A \geq \min(m,n)$ ■ $\operatorname{rang} A \leq \min(m,n)$ ☐ $\operatorname{rang} A \geq \max(m,n)$ ■ $\operatorname{rang} A \leq \max(m,n)$

8. Sei A eine $n \times n$ Matrix, was ist äquivalent zur Aussage, dass A invertierbar ist?

   ■ $\operatorname{rang} A = n$ ■ Die Zeilen von A sind linear unabhängig. ☐ $\det A = 1$ ■ $\det A \neq 0$

9. Welche dieser Mengen sind bezüglich des euklidischen Standardskalarprodukts

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$$

   paarweise orthogonal?

   ■ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/2} \end{pmatrix} \right\}$ ■ $\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) \\ 0 \\ \sin(\pi/6) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\pi/6) \\ 0 \\ \cos(\pi/6) \end{pmatrix} \right\}$ ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

10. Seien A, B reelle, quadratische Matrizen, sodass AB invertierbar ist. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

    ☐ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ ■ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ☐ $(AB)^{-1}$ kann nicht weiter vereinfacht werden.

11. Seien A, B reelle Matrizen, sodass AB invertierbar ist, welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

    ☐ $(A+B)^2$ ist invertierbar. ☐ $(BA)^2$ ist invertierbar. ■ $(AB)^{2019}$ ist invertierbar.

12. Seien V und W zwei reelle, endlich-dimensionale Vektorräume, $\mu \in \mathbb{R}$ und $x, y \in V$. Was erfüllt eine lineare Abbildung $f : V \to W$?

    ■ $f(\mu x + y) = \mu f(x) + f(y)$

    ☐ $f(0) = 1$

    ☐ Es gibt eine eindeutige Matrix A, sodass $f(v) = Av$ für alle $v \in V$

    ■ Ist $\{v_1, \ldots, v_N\}$ eine Basis von V, so ist f durch die Werte $f(v_1), \ldots, f(v_N)$ eindeutig bestimmt.

    ■ $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$

13. Sei V ein reeller Vektorraum, $U \subset V$ eine linear unabhängige Teilmenge und $E \subset V$ ein Erzeugendensystem von V. Was besagt der Basisergänzungssatz?

    ☐ E lässt sich durch Elemente von U zu einer Basis von V ergänzen

    ■ U lässt sich durch Elemente von E zu einer Basis von V ergänzen

- ■ Es gibt eine Basis B von V mit $U \subset B$
- ☐ $U \cup E$ bildet eine Basis von V

14. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?
    - ■ Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.
    - ☐ Jede monotone Folge ist eine Cauchy-Folge.
    - ■ Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge.
    - ■ Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert in $\mathbb{R}$.

15. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, für welche Vorraussetzungen kann man zeigen, dass $|f(x)| \le C < \infty$ für alle $x \in [0,1]$?

    ☐ $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ ■ f stetig auf $[0,1]$ ☐ $\frac{1}{f(x)} > 0$ für alle $x \in [0,1]$ ☐ $e^{f(x)} \le C_2 < \infty$ für alle $x \in [0,1]$

16. Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, für welche Vorraussetzungen kann man zeigen, dass $|f(x)| \le C < \infty$ für alle $x \in [0,\infty)$?
    - ■ $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ und f stetig
    - ■ $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(x)^k$ konvergiert gleichmäßig für alle $x \in [0,\infty)$
    - ☐ f ist gleichmäßig stetig
    - ☐ $\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ konvergiert

17. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
    Welche der folgenden Matrizen ist Zeilenstufenform von A?

    ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Wie lautet die Formel für partielle Integration?
    - ■ $\int f'g\,\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right] - \int fg'\,\mathrm{d}x$
    - ☐ $\int f'g\,\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right] + \int fg'\,\mathrm{d}x$
    - ■ $\int fg'\,\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right] - \int f'g\,\mathrm{d}x$
    - ☐ $\int fg'\,\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right] + \int f'g\,\mathrm{d}x$

19. Berechnen Sie...
    (a) ... $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ mit $f(x) = 3x^3 + 6x + 2$.
    (b) ... $\int_0^3 \int_2^6 g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mit $g(x,y) = 2y$.
    (c) ... $\int_1^e h(x)\,\mathrm{d}x$ mit $h(x) = \ln x$.

    Lösung: Es gilt $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 28$, $\int_0^3 \int_2^6 g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 36$ und $\int_1^e h(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

20. Wie lautet die Ableitung von $v(\varphi) = \sin(\cos(\varphi))$?
    - ■ $-\sin(\varphi)\cdot\cos(\cos(\varphi))$
    - ☐ die Ableitung ist konstant mit $v' \equiv \pi$
    - ☐ $\sin^2(\varphi)\cdot\varphi\cos(\varphi)$
    - ☐ $\sin(\varphi)\cdot\cos(\cos(\varphi))$

21. Gegeben sei das Polynom $p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 4x + 8$. Zerlegen Sie das Polynom in Linearfaktoren, indem sie mindestens einmal Polynomdivision durchführen.

    Hinweis: Setzen Sie mal ganze Zahlen ein.

    Lösung: Es ist $p(x) = 2(x-2)\big(x-(1+\sqrt{3})\big)\big(x-(1-\sqrt{3})\big)$.

22. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

    ■ $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x \end{pmatrix}$

    ☐ $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ fest, $b \neq 0$.

    ☐ $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ als Abbildung zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen

    ■ $i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ als Abbildung zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen

23. Gegeben seien die Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

    Berechnen Sie $\det(LR)$.

    Lösung: Es gilt $\det(LR) = -2$.

24. Seien V und W reelle Vektorräume und $f\colon V \to W$ linear. Welche *alleinige* Voraussetzung müssen V und W erfüllen, damit die folgende Äquivalenz gilt?

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ bijektiv}.$$

    ■ $\dim V = \dim W < \infty$

    ☐ $\dim V, \dim W < \infty$

    ☐ $\dim V = \dim W$

    ☐ Die Aussage ist unabhängig von der Dimension von V und W.

25. Bestimmen Sie den Wert von $\lim_{t\to 0} t^2 \sin(1/t)$.

    ■ 0 ☐ 1 ☐ ∞ ☐ Der Limes ist nicht definiert.

26. Bestimmen Sie mittels der Regel von de l'Hospital den Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)}{\exp(x) - 1} x.$$

    Lösung: Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)\cdot x}{\exp(x)-1} = 1$.